Facoltà di Ingegneria
Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettronica, Informatica, dell'Informazione

Algebra Lineare e Geometria

Teorema e formula di Grassmann

◇ **Teorema di Grassmann.** *Siano U e W sottospazi vettoriali di uno stesso spazio vettoriale V sul campo K. Allora vale la seguente formula:*

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W). \tag{1}$$

Si dice che (1) è la **formula di Grassmann**. Il teorema è già stato dimostrato nel caso che $U \cap W = \{0_V\}$, cioè che la somma $U + W$ sia diretta (cfr. pagg. 81–82 del libro).
Ricordiamo che, se $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ sono famiglie di generatori rispettivamente di U e di W, allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m\}$ è una famiglia di generatori del sottospazio somma $U + W$.

◇ **Dimostrazione del teorema di Grassmann**

Per quanto detto sopra, possiamo supporre che $\dim(U \cap W) = r > 0$. Sia $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ una base di $U \cap W$. Per il teorema della base incompleta, possiamo estendere $\mathcal{B}_1$ ad una base $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ di U e ad una base $\mathcal{B}_3 = \{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_m\}$ di W, dove $n = \dim(U)$ e $m = \dim(W)$. Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n, w_{r+1}, \ldots, w_m\}$ è un sistema di generatori di $U + W$ formato da $r + (n - r) + (m - r) = n + m - r$ vettori di V. Se dimostriamo che la famiglia $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, allora $\mathcal{B}$ sarà una base di $U + W$ e quindi $U + W$ avrà dimensione

$$\dim(U + W) = n + m - r = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

che è equivalente alla formula (1) e quindi avremo concluso la dimostrazione del teorema.
Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_m \in K$ tali che

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \alpha_n u_n + \beta_{r+1} w_{r+1} + \cdots + \beta_m w_m = 0_V. \tag{2}$$

Si noti che $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in U \cap W$, $u = \alpha_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \alpha_n u_n \in U$ e $w = \beta_{r+1} w_{r+1} + \cdots + \beta_m w_m \in W$. Portando al secondo membro il vettore $w \in W$, otteniamo:

$$U \ni v + u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \alpha_n u_n = -w = -\beta_{r+1} w_{r+1} - \cdots - \beta_m w_m \in W,$$

quindi, per definizione di intersezione, il vettore

$$v + u = -w = -\beta_{r+1} w_{r+1} - \cdots - \beta_m w_m,$$

appartiene a $U \cap W$ e, siccome $\mathcal{B}_1$ è una base di $U \cap W$, si scrive come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_r$, cioè esistono $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in K$ tali che

$$-w = -\beta_{r+1} w_{r+1} - \cdots - \beta_m w_m = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r.$$

Portando tutto allo stesso membro, si ha

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r + \beta_{r+1} w_{r+1} + \cdots + \beta_m w_m = 0_V,$$

ed essendo $\{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_m\}$ linearmente indipendente, perché base di W, ne segue che $\beta_i = 0$, per $i = 1, \ldots, m$. Sostituendo $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_m = 0$ nella formula (2), si trova

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \alpha_n u_n = 0_V,$$

ed essendo $\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ linearmente indipendente, perché base di U, ne segue che $\alpha_i = 0$, per $i = 1, \ldots, n$, e quindi che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, come volevasi dimostrare.